Лекция № 1

**Числовые ряды**

***1. Основные понятия***

*Опр. 1. Числовым рядом* называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения: . (1)

Числа  называются *членами* ряда, член  - *общим* или *n-м членом* ряда,

Рассмотрим примеры известных числовых рядов.

1. Ряд геометрической прогрессии
2. Гармонический ряд
3. Обобщенный гармонический ряд

 >0 – действительное число. (4)

Частные случаи обобщенного гармонического ряда:

Ряды (2), (3) и (4) часто используют при исследовании других рядов на сходимость. Сходимость или расходимость данных рядов будет установлена на практических занятиях.

*Опр. 2. С*умма *n* первых членов ряда называется *n-ой частичной суммой* ряда, т.е. .

*Опр. 3. Числовой ряд* называется *сходящимся*, если существует конечный предел частичной суммы ряда, т.е. . Полученное число *S* называют суммой сходящегося числового ряда. Если предел  не существует или равен , ряд называется *расходящимся*.

*Пример*. Исследуем на сходимость ряд:

*Решение.* Найдем частичную сумму ряда и преобразуем ее используя свойство логарифмов

.

, т.е. ряд расходится.

***2. Свойства числовых рядов***

***Свойство 1.*** Если ряд (1)  сходится и его сумма равна *S*, то ряд , где с – произвольное число, тоже сходится и его сумма равна с*S.* Если ряд (1) расходится, то расходится и ряд где с – произвольное число.

***Свойство 2.*** Если сходятся ряды, а их суммы равны соответственно и , то сходятся и ряды , причем сумма каждого соответственно равна .

*Следствие:* сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов – расходящийся ряд.

*Замечание:* сумма (разность) расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

***Свойство 3.*** Если к ряду (1) прибавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд сходится и расходится одновременно с рядом (1).

*Замечание.* Ряд, полученный из ряда (1) отбрасывание первых *n* членов называют остатком ряда (1). Обозначают

Из свойства 3 следует, что если ряд (1) сходится, то .

Доказательства рассмотренных свойств смотрите в источнике 1, параграф 59, п.59.2

1. ***Необходимый признак сходимости числового ряда***

***Теорема.*** Если ряд (1) сходится, то .

*Доказательство:*

Пусть ряд (1) сходится, тогда , так как при , то

. Выразим . Найдем предел .

Теорема доказана.

*Следствие*. (Достаточное условие расходимости ряда.)

**Если  или этот предел не существует, то ряд расходится.**

Если же необходимый признак выполняется, то вопрос о сходимости ряда остаётся открытым. Требуется дополнительное исследование.

*Пример* 1. Исследовать сходимость ряда .

*Решение*. Данный ряд расходится, т.к. , т.е. выполняется достаточное условие расходимости ряда.

*Пример* 2 Исследовать сходимость ряда 

*Решение*. Ряд расходится, т.к. последовательность частичных сумм

1, 0, 1, 0, 1, 0, … ( = 1, = 0, = 1, …) не имеет предела.

1. ***Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов***

Необходимый признак сходимости не даёт возможности судить о том, сходится данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью признаков, которые называют *достаточными признаками сходимости.* Рассмотрим достаточные признаки для *знакоположительных* рядов, т.е. таких, все члены которых неотрицательны.

***Признаки сравнения***

***Теорема 1 (признак сравнения****).* *Пусть даны два знакоположительных ряда* *. Если для всех n выполняется неравенство , то из* ***сходимости*** *ряда* *следует* ***сходимость*** *ряд****а***

*из* ***расходимости*** *ряда* *следует* ***расходимость*** *ряда*

*Доказательство.*

Обозначим частичные суммы рада (1) и (2) соответственно и .

1. Пусть ряд (2) **сходится**, тогда существует предел частичных сумм данного ряда, т.е. . Так как члены ряда положительны, то последовательность частичных сумм данного ряда является возрастающей, следовательно, выполняется неравенство.

По условию теоремы для всех *n*  выполняется неравенство , значит, выполняется неравенство и для частичных сумм рядов (1) и (2), т.е. .

Из неравенств и , следует неравенство .

Так же как для рада (2) последовательность частичных сумм ряда (1) является возрастающей, кроме того она ограничена числом . По признаку существования предела последовательность имеет предел, а значит ряд (1) **сходится.**

1. Пусть ряд (1) **расходится**, тогда , в силу неравенства ,

. Тогда по определению ряд (2) тоже **расходится.**

Теорема доказана.

*Замечание.* Теорема 1 выполняется и тогда, когда неравенство выполняется не для всех членов ряда, а начиная с некоторого номера (используем свойство 3 числовых рядов).

**Теорема 2 (предельный признак сравнения).** Пусть даны два знакоположительных ряда  **.** Если существует конечный, отличный от нуля предел , то ряды (1) и (2) сходятся и расходятся одновременно.

*Доказательство.*

По условию теоремы существует предел . Применим определение предела последовательности для данного предела.

.

Преобразуем неравенство, содержащееся в определении:

1. Пусть ряд (2) **сходится**, тогда по свойству 1 числовых рядов (п.2) сходится и ряд

, а по теореме 1 будет **сходится** и ряд (1) (используем неравенство ).

1. Пусть ряд (1) **расходится**, тогда по теореме 1 расходится и ряд (используем нер**авенство ). По свойству 1 числовых рядов (п.2) будет** расходится и ряд (2).

Теорема доказана.

*Замечания:*

1. Для применения рассмотренных теорем, требуется подбирать ряды, сходимость и расходимость которых нам известна. Такие ряды принято называть *эталонными.* К эталонным рядам относятся рассмотренные выше ряды:

Ряд геометрической прогрессии

**ряд сходится** при **** < 1 и **расходится при  1**.

Гармонический ряд

**расходится**.

Обобщенные гармонические ряды

 >0 – действительное число

**сходится при** , **расходится при** .

1. Если общий член ряда представляет собой отношение двух многочленов (алгебраических выражений), то эталонный ряд подбирают среди обобщенных гармонических рядов, выбирая , где и наибольшие показатели степеней знаменателя и числителя соответственно.

Доказательства сходимости и расходимости эталонных рядов, а также примеры использования признаков сравнения будут рассмотрены на практических занятиях.

Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 8, параграфы 59, 60 (60.1).
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», раздел 5, глава 13 п. 13.1 - 13.3